L24 Partial Fractions (Conti.) (續.部分分式)

Ch.10 Vectors and the Geometry of space (向量和空間幾何) (與 Ch.13 一起教)

[Part 1] n-dimensional coordinate system (n 維的座標系)

(1) 1-dimensional coordinate system

$\int (\sec^8 x \tan^8 x + \sec^3 x \tan^3 x + \tan^4 x) dx = ?$

e.g $\frac{4x^2+5x+3}{(2x+1)^3(x+5)(x^2+x+1)^2}$

$= \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2} + \frac{C}{(2x+1)^3} + \frac{D}{x+5} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2}$

Step3:去分母後比較係數把 A,B,C,D,...算出

e.g. $\frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$x^2+5x+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$

A+B=1

B+C=5

A+C=2

⇒A=-1, B=2, C=3

$\therefore \frac{x^2+5x+2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2+1}$

Step4:逐項將 $\int \frac{A}{(ax+b)^m} dx$ 與 $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+b+c)^n} dx$ 積出即可得 $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

$\int \frac{A}{(ax+b)^m} dx$ by substitution

$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+b+c)^n} dx$ 如何積呢？

$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} dx + (B - \frac{A}{2a}) \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx$

前項可以積了，後像用配方法後，用 trigonometric substitution 來積

L24 Partial Fractions (Conti.) (續.部分分式)

Ch.10 Vectors and the Geometry of space (向量和空間幾何) (與 Ch.13 一起教)

[Part 1] n-dimensional coordinate system (n 維的座標系)

(1) 1-dimensional coordinate system

1 先對分母做因式分解

2 對每一項因式做分配

3 去分母，比較係數

4 解聯立方程式

5 一次式可積

6 二次式吃掉 x 項

7 常數的部分，分母配方，再三角代換

eg. ① $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+C$$

By the way 定積分是一個數，不定積分是一個函數。

eg. ② $\int \frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2}dx$

pf: $\int \frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2}dx=\int \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+\frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$

$$3x^4+x^3+20x^2+3x+31=A(x^2+4)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+4)+(Dx+E)$$

A+B=3

B+C=1

8A+C+4B+D=20

4B+4C+D+E=3

16A+4C+E=31

L24 Partial Fractions (Conti.) (續.部分分式)

Ch.10 Vectors and the Geometry of space (向量和空間幾何) (與 Ch.13 一起教)

[Part 1] n-dimensional coordinate system (n 維的座標系)

(1) 1-dimensional coordinate system

⇒A=2, B=1, C=0, D=0, E=-1

$$=\int\frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2}dx=\int\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2+4}-\frac{1}{(x^2+4)^2}dx$$

今將其改成

$$=\int\frac{2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+4}+\frac{2x+1}{(x^2+4)^2}dx=2\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}dx+\int\frac{1}{x^2+4}+\int\frac{2x}{(x^2+4)^2}dx+\int\frac{1}{(x^2+4)^2}dx$$

$$=2\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{1}{x^2+4}+\int\frac{1}{(x^2+4)^2}dx$$

Let x=2tanu, then dx=2sec^{2}udu

$$\int\frac{1}{(x^2+4)^2}dx=\int\frac{2\sec^2 u}{16\sec^4 u}du=\frac{1}{8}\int\cos^2 u\,du=\frac{1}{8}\int\frac{1+\cos(2u)}{2}du=\frac{u}{16}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2u)+C$$

$$=\frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\sin u\cos u+C=\frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+C$$ 圖 L31-1

原式 $=2\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+\frac{9}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{1}{x^2+4}+\frac{x}{8(x^2+4)}+C$

Ex:P429(11.20.23.28.34)

Chapter 10 Vectors and the Geometry of space

§ 10.1 (n-dimensional coordinate system $\mathbb{R}^n$)

① 1-dimensional coord. system $\mathbb{R}$. (即數線) dimensional維度

Q:什麼是數線？A: 原點、正向、單位長。

選了一個固定點，將其記爲原點(origin)O，過 O 點畫一條直線，選一邊爲正，選某長度爲單位長，則數線上的每一個點可以在ℝ所中找到某一個數且僅有一個數與之對應。反之亦然

數線記成ℝ(此數稱爲此點的坐標)